Álgebra Linear e Geometria Analítica

Valores próprios e vetores próprios

Departamento de Matemática Universidade de Aveiro

Valor próprio e vetor próprio

Sejam A uma matriz $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

λ é um valor próprio de A se existe um vetor não nulo $X \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$AX = \lambda X.$$

Todo o vetor $X \in \mathbb{R}^n$ não nulo que satisfaz $AX = \lambda X$ é designado por vetor próprio de A associado ao valor próprio λ.

λ é um valor próprio de A

$\Updownarrow$

o sistema homogéneo $(A - \lambda I_n)X = 0$ possui uma solução não trivial

$\Updownarrow$

$\det(A - \lambda I_n) = 0$

Polinómio caraterístico

Seja A uma matriz $n \times n$.
O polinómio caraterístico de A é um polinómio de grau n em λ dado por

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

A equação $\det(A - \lambda I_n) = 0$ diz-se a equação caraterística de A.

Teorema: Os valores próprios de A são as raízes reais do polinómio caraterístico de A.

Observação: Os valores próprios de uma matriz triangular são as entradas da sua diagonal principal.

Subespaço próprio associado a um valor próprio

Teorema: Seja λ um valor próprio da matriz A $n \times n$. Então,

$$U_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n : X \text{ é vetor próprio de } A \text{ associado a } \lambda\} \cup \{0\}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

U_λ diz-se o subespaço próprio de A associado ao valor próprio λ e

$$U_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I_n)X = 0\} = \mathcal{N}(A - \lambda I_n).$$

Teorema: Seja A $n \times n$ com k valores próprios distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ e

$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_{\lambda_1}} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{n_{\lambda_k}}.$$

Então $1 \leq \dim U_{\lambda_i} \leq n_{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, k$.

Exemplo 1

Determinar valores os próprios e os subespaços próprios de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

O polinómio caraterístico de A é

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

A equação caraterística de A é

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 \quad & \iff \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (2-\lambda)^1(3-\lambda)^1 = 0 \\ & \iff \quad \lambda = 2 \ \vee \ \lambda = 3 \end{aligned}$$

Os valores próprios de A são 2 e 3, com $n_2 = n_3 = 1$. A dimensão dos subespaços associados é igual a 1, pois $1 \le \dim U_2 \le 1$ e $1 \le \dim U_3 \le 1$.

Exemplo 1 – continuação

$$(A - 2I)X = 0 \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$U_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \langle X_1 \rangle, \qquad \text{com } X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$(A - 3I)X = 0 \iff \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = 2x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$U_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \langle X_2 \rangle, \qquad \text{com } X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2

Determinar valores e subespaços próprios de $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

O polinómio caraterístico de A

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 1)$$

possui uma única raiz real $\lambda = 0$ (e um par de raízes complexas conjugadas).

O espaço próprio de A é $U_0 = \mathcal{N}(A) = \langle X \rangle$, com $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, e $\dim U_0 = 1$.

Exemplo 3

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Determinar valores e subespaços próprios.

A é triangular $\Leftrightarrow p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) \Leftrightarrow$ possui valores próprios 1 e 2.

$$X \in U_1 \iff (A - 1I_3)X = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = 0 \iff U_1 = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

$$X \in U_2 \iff (A - 2I_3)X = 0 \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X = 0 \iff U_2 = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

Matrizes semelhantes e matrizes diagonalizáveis

A e B são matrizes semelhantes se existir uma matriz invertível P tal que

$$P^{-1}A\,P \;=\; B.$$

Observação: Com P invertível, $P^{-1}AP=B \iff AP=PB \iff A=PBP^{-1}$.

Teorema: Matrizes semelhantes possuem o mesmo polinómio caraterístico e, portanto, os mesmo valores próprios.

Uma matriz diz-se diagonalizável se é semelhante a uma matriz diagonal.

Sendo A diagonalizável, uma matriz diagonalizante de A é uma matriz invertível P tal que

$$P^{-1}A\,P \;=\; D$$

é uma matriz diagonal.

Diagonalização

Sejam A, P e D matrizes $n \times n$, sendo $X_1, \ldots, X_n$ as colunas de P e D diagonal com $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ na diagonal principal. Então (verifique que)

- $AP = A \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX_1 & \cdots & AX_n \end{bmatrix}$
- $PD = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 X_1 & \cdots & \lambda_n X_n \end{bmatrix}$
- $AP = PD \iff X_i$ é vetor próprio de A associado a λ_i, $i = 1, \ldots, n$.

Teorema: A $n \times n$ é diagonalizável $\iff$ A possui n vetores próprios l.i.

Nestas condições, A é semelhante à matriz diagonal $P^{-1} A P = D$ e

- as colunas da matriz diagonalizante P são n vetores próprios l.i. de A,
- a matriz D contém os valores próprios de A na diagonal principal e
- a ordem dos vetores próprios determina a ordem dos valores próprios.

Vetores próprios linearmente independentes

Lema: Vetores próprios associados a valores próprios distintos são l.i.

Demonstração: Sejam X_1 e X_2 vetores próprios de A associados a dois valores próprios distintos λ_1 e λ_2 e suponha-se que $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0$.
Pré-multiplicando ambos os membros da igualdade por $A - \lambda_1 I$, obtém-se

$$\alpha_1 \underbrace{(A - \lambda_1 I) X_1}_{0} + \alpha_2 \underbrace{(A - \lambda_1 I) X_2}_{AX_2 - \lambda_1 X_2} = 0 \iff \alpha_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} \underbrace{X_2}_{\neq 0} = 0,$$

donde $\alpha_2 = 0$. Logo, $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0 \iff \alpha_1 X_1 = 0$ e, como $X_1 \neq 0$, também $\alpha_1 = 0$.
Conclui-se que o conjunto $\{X_1, X_2\}$ é l.i.

Teorema: Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ os valores próprios distintos de A. Então

$$A \text{ possui } \dim U_{\lambda_1} + \cdots + \dim U_{\lambda_k} \text{ vetores próprios l.i.}$$

Diagonalização e valores próprios

Teorema: Seja $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_{\lambda_1}} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{n_{\lambda_k}}$ o polinómio caraterístico de A, sendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ os valores próprios distintos. Então,

$$A \text{ é diagonalizável se e só se } \dim U_{\lambda_i} = n_{\lambda_i},\ i = 1, \ldots, k.$$

Observações: Seja A uma matriz $n \times n$.

- Se A possui n valores próprios distintos, é diagonalizável.
- O recíproco da afirmação anterior é falso! Vide o exemplo 4.
- Para descobrir se A, com $k < n$ valores próprios distintos, é diagonalizável, é preciso verificar se $\dim U_{\lambda_i} = n_{\lambda_i}$ só para $n_{\lambda_i} > 1$.
- $\dim U_{\lambda_i} = \dim \mathcal{N}(A - \lambda_i I) = \text{nul}(A - \lambda_i I) = n - \text{car}(A - \lambda_i I)$.

Exemplo 1: A 2×2 é diagonalizável, pois tem 2 valores próprios distintos.
Exemplo 2: A 3×3 não é diagonálizável, tendo apenas 1 vetor próprio l.i.
Exemplo 3: A não é diagonálizável, pois $\dim U_1 = 1 < n_1 = 2$.

Exemplo 4

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem valores próprios 1 e 2 e $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)^1$.

$1 \leq \dim U_2 \leq 1 \Leftrightarrow \dim U_2 = 1$, mas $1 \leq \dim U_1 \leq 2 \Leftrightarrow \dim U_1 \in \{1, 2\}$.

Contudo, $A - 1I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem caraterística 1.

Logo, $\dim U_1 = \mathrm{nul}(A - 1I) = 3 - \mathrm{car}(A - 1I) = 2$ e A é diagonalizável.

Assim, $U_1 = \mathcal{N}(A - 1I) = \langle X_1, X_2 \rangle$. Verifique que $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 4 – continuação

Como $A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $U_2 = \langle X_3 \rangle$ com $X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Então, uma matriz diagonalizante de A é

$$P = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tal que } P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Outra matriz diagonalizante de A, por exemplo, é

$$Q = \begin{bmatrix} X_2 & X_3 & X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ sendo } Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicação ao cálculo da potência e da inversa

Se A é diagonalizável, então existe P invertível tal que $A = PDP^{-1}$.

Para $k \in \mathbb{N}$,

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow A^k = PDP^{-1}PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^kP^{-1}.$$

Se A é invertível, $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$ é semelhante a $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Então,

$A^8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 511 & -255 \\ 510 & -254 \end{bmatrix}$.

Diagonalização de matrizes simétricas

Recorde que A é simétrica se $A^T = A$.

Teorema: Uma matriz simétrica $n \times n$ possui n valores próprios (reais).

Teorema: Vetores próprios de uma matriz simétrica associados a valores próprios distintos são ortogonais.

Demonstração: Se A $n \times n$ é simétrica e $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$, tem-se que

$$(AX_1) \cdot X_2 = X_1^T A^T X_2 = X_1^T A X_2 = X_1 \cdot (AX_2).$$

Se X_1 e X_2 são vetores próprios de A associados, respetivamente, aos valores próprios λ_1 e λ_2, $(AX_1) \cdot X_2 = \lambda_1 X_1 \cdot X_2 = X_1 \cdot (AX_2) = \lambda_2 X_1 \cdot X_2$, donde $(\lambda_1 - \lambda_2) X_1 \cdot X_2 = 0$. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $X_1 \cdot X_2 = 0$.

Diagonalização ortogonal de matrizes simétricas

A matriz quadrada P é ortogonal se $P^TP = I \iff$ é invertível e $P^{-1} = P^T$.

Teorema: Dada uma matriz $P = \begin{bmatrix} P_1 & \cdots & P_n \end{bmatrix}$ de colunas $P_1, \ldots, P_n$,

$$P \text{ é ortogonal} \Leftrightarrow \{P_1, \ldots, P_n\} \text{ é uma base o.n. de } \mathbb{R}^n.$$

A é ortogonalmente diagonalizável se A é diagonalizável e possui uma matriz diagonalizante ortogonal (cujas colunas são uma base o.n. de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de A).

Teorema: Toda a matriz simétrica é ortogonalmente diagonalizável.

Exemplo 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ é simétrica} \ \Leftrightarrow \ A \text{ é ortogonalmente diagonalizável}$$

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda^2) - 4 = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda = 3 \ \vee \ \lambda = -1$$

$$U_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \langle X_1 \rangle, \qquad X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad P_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$U_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} -x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \langle X_2 \rangle, \qquad X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad P_2 = \frac{X_2}{\|X_2\|} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Uma matriz diagonalizante ortogonal de A é

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \qquad \text{sendo} \qquad P^T A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ é simétrica } \Leftrightarrow A \text{ é ortogonalmente diagonalizável}$$

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \ \vee \ \lambda = -1$$

$$U_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_1 \cdot P_2 = 0$$

Exemplo 6 – continuação

$$U_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \qquad P_3 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Então $\{P_1, P_2, P_2\}$ é uma base o.n. de vetores próprios de A e

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonalizante ortogonal de A tal que

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$